УДК 378.14:004

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Ж.А. Черняк[1], А.А. Черняк[2]

[1] *Белорусская государственная академия связи, Беларусь*

[2] *Уорикский университет, Великобритания*

Аннотация. Представлена разработка факультативного занятия на повышенном уровне по изучению производной и ее применению с использованием системы компьютерной математики Mathcad.

Ключевые слова. Системы компьютерной математики, Mathcad, производная, функция одной переменной.

INVESTIGATION OF FUNCTIONS OF SINGLE VARIABLE ON THE BASIS OF MATHCAD

Z.A. Charniak[1], A.A. Charniak[2]

[1] *Belarusian State Academy of Communications, Belarus*

[2] *University of Warwick, UK*

Annotation. The teaching lesson of investigation of functions of single variable on the basis of Mathcad is given.

Keywords. Systems of computer mathematics, Mathcad, derivative, functions of single variable.

Введение

Развитие информационных технологий бросает вызов консервативным подходам и формам преподавания математики. Именно поэтому во всем мире наблюдается лавинообразное распространение методических разработок, учебников и программ по применению систем компьютерной математики (сокращенно, СКМ) в преподавании естественнонаучных дисциплин на всех ступенях образования – от школы до аспирантуры.

Многие авторы еще с начала нулевых годов нашего века обосновывали и пропагандировали прогрессивные подходы в обучении на базе СКМ [1-6]. На данный момент уже нет необходимости убеждать кого-либо в том, что использование СКМ поднимает эффективность образования на иной, более высокий, качественный уровень, освобождая учебный процесс от трудоемких и рутинных вычислений, отвлекающих школьников и студентов от главных идей, позволяя преподавателю сконцентрировать обучение на постановке задачи, алгоритме ее решения и анализе полученных результатов.

В данной статье представлена разработка факультативного занятия на повышенном уровне по изучению производной и ее применению с использованием СКМ Mathcad. При этом мы исходили из установки, что школьник не обязан предварительно владеть многообразным инструментарием Mathcad или «отвлекаться» на его изучение в процессе занятия. Ему достаточно уметь вводить математические символы с помощью соответствующих панелей инструментов и «отдавать» команды на выполнение той или иной процедуры.

Отметим главное: нетривиальные подпрограммы-процедуры, используемые в данной разработке, не предусмотрены инструментарием Mathcad и являются авторскими продуктами, которые «скрыты» на рабочем листе Mathcad-документа «Исследование функций» в специальном блоке (он отмечен жирной красной линией), к которому доступ открывается только при наличии пароля. Пользователю нет необходимости вторгаться в эту скрытую область, чтобы что-то менять в ней в зависимости от решаемой задачи - процедуры отлажены и универсальны. Вся необходимая информация для ввода исходных данных содержится в виде комментариев и демонстрационных примеров на рабочем листе Mathcad-документа, включая выполненный на этом листе пример. Файл с Mathcad-документом «Исследование функций» прилагается к данной статье.

Приведем общий алгоритм исследование функции с помощью производной:

а) найти область определения функции, область непрерывности и точки разрыва;

б) проверить выполнение некоторых дополнительных условий, помогающих построению (периодичность, четность, нечетность);

в) найти асимптоты графика функции;

г) вычислить первую производную; найти точки, в которых первая производная либо не существует, либо равна нулю; определить промежутки возрастания, убывания функции; найти точки экстремума;

д) вычислить вторую производную; найти точки, в которых вторая производная либо не существует, либо равна нулю; определить промежутки выпуклости (вверх или вниз) графика функции и найти точки перегиба;

е) найти точки пересечения с осями координат; для более точного построения графика можно вычислить значения функции в дополнительных точках.

Обучающие демонстрационные задачи

Задача 1. Исследуем функцию $y = \frac{e^{x+1}}{x+1}$ и построим ее график, затем проверим все этапы решения с помощью Mathcad

Область определения функции $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $y(x)$ непрерывна всюду за исключением точки $x = -1$. Функция свойствами четности или нечетности не обладает;

Найдем асимптоты. Так как $x = -1$ – точка разрыва функции, то $x = -1$ – вертикальная асимптота: $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{e^{x+1}}{x+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{e^{x+1}}{x+1} = +\infty$.

Проверим существование наклонных асимптот:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1}}{(x+1)x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(x^2+x)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+1}}{2} = 0; \quad b_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - 0\right) = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$.

Проверим, существует ли асимптота при $x \to +\infty$:

$k_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x+1}}{(x+1)x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x+1}}{2} = \infty$, значит, при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не будет;

Найдем промежутки монотонности и экстремумы.

$y' = \left(\dfrac{e^{x+1}}{x+1} \right)' = \dfrac{e^{x+1}(x+1) - e^{x+1}}{(x+1)^2} = \dfrac{e^{x+1}x}{(x+1)^2}$; $y' = 0$ при $x = 0$. Производная не существует при $x = -1$. Решим неравенство $y' > 0$: $\dfrac{e^{x+1}x}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Составим таблицу 1:

Промежутки монотонности				
$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
–	не существует	–	0	+
убывает	не существует	убывает	min	возрастает

$y_{\min}(0) = e$ – минимум функции;

Найдем промежутки выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{e^{x+1}x}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(e^{x+1}x + e^{x+1})(x+1)^2 - xe^{x+1}2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{e^{x+1}(x^2+1)}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' не существует при $x = -1$ и нигде не обращается в нуль. Решим неравенство $y'' > 0$: $\dfrac{e^{x+1}(x^2+1)}{(x+1)^3} > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Составим таблицу 2:

Промежутки выпуклости			
x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ +\infty)$
y''	–	не существует	+
y	выпукла вверх	не существует	выпукла вниз

Точек перегиба нет.

Найдем точки пересечения с осями координат. Уравнение $\dfrac{e^{x+1}}{x+1} = 0$ не имеет корней, следовательно, график не пересекается с осью Ox. При $x = 0$ значение функции $y = e$, т. е. $(0;e)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy.

По данным исследования строим график функции (рис. 1).

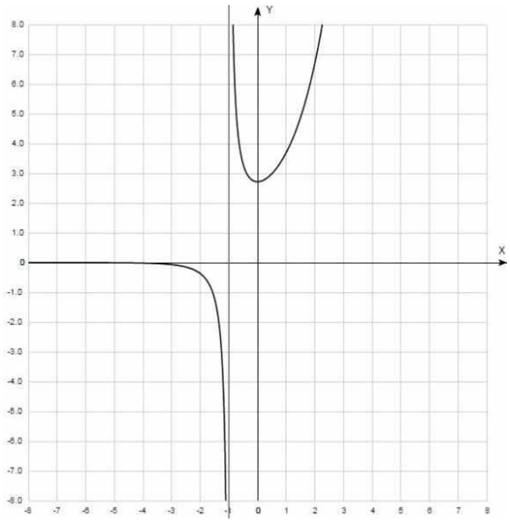

Рис. 1. График функции задачи 1.

Теперь проверим все этапы решения с помощью Mathcad

Построение графика в авторской программе «Исследование функций» осуществляется автоматически, однако иногда требуется минимальное вмешательство для установлений нужных границ рисунка, в которых вам бы хотелось увидеть свой график. По умолчанию диапазон изменения значений функций вдоль оси $0y$ определяется автоматически, а диапазон изменения значений независимых переменных вдоль оси $0x$ задается от -10 до 10. Поэтому иногда приходится изменять эти диапазоны, если некоторые важные части графика выпадают из видимой области. Поэтому сделаем некоторые пояснения, как менять диапазоны.

Шаблон для построения графиков функций одной переменной в прямоугольных координатах показан на рис 2. Внешняя рамка, снабженная тремя маркерами изменения размеров, служит для перемещения графика и изменения его размеров. Собственно график будет находиться внутри меньшей рамки, снизу и слева от которой находятся две метки: нижняя — для ввода идентификаторов независимых переменных, левая — для ввода идентификаторов соответствующих им функций. Переход от метки к метке осуществляется клавишей <Tab>.

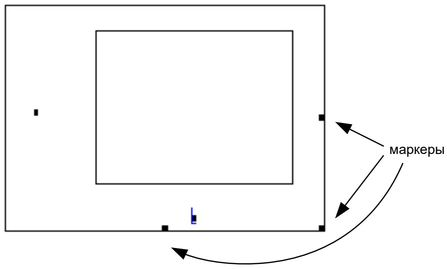

Рис. 2. Шаблон для построения графиков функций одной переменной в прямоугольных координатах

Две такие метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси 0x появляются слева и справа от вводимых идентификаторов независимых переменных. Еще две метки для ввода границ изменения графиков вдоль оси 0y появляются ниже и выше вводимых идентификаторов функций (рис. 3). С помощью одного шаблона можно строить несколько графиков функций на одной координатной плоскости (важно только, чтобы независимые переменные этих функций имели одинаковые диапазоны изменения). Для этого на месте метки снизу от оси 0x вводятся через запятую идентификаторы переменных, а на месте слева от оси 0y — идентификаторы соответствующих им функций.

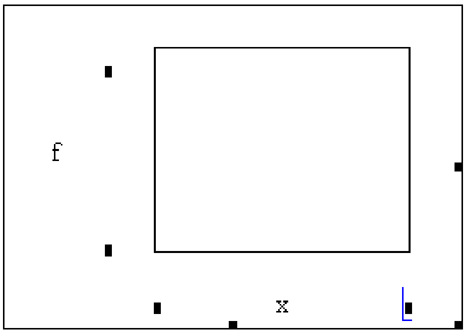

Рис. 3. Шаблон для построения графика функции $f(x)$

Итак, откройте теперь авторскую программу «Исследование функций» и введите заданную функцию $y = \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$. После этого вы увидите:

а) уравнения горизонтальных (наклонных) асимптот, если таковые имеются (рис. 4):

$$\text{наклонные\_асимптоты}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} \text{"нет при x к -бесконечность"} \\ \text{"нет при x к +бесконечность"} \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Асимптоты задачи 1 в документе Mathcad

в данной случае их нет.

(б) первую производную, стационарные точки и значения функции в стационарных точках (рис. 5):

$$f'(x) \rightarrow \frac{x \cdot e^{x+1}}{(x+1)^2} \qquad \text{стационарные\_точки} = 0 \qquad \text{значения\_в\_стацион\_точках} = 2.718$$

Рис. 5. Стационарные точки задачи 1 в документе Mathcad

(в) промежутки монотонности (рис. 6):

$$\text{возрастание} \to 0 < x$$

$$\text{убывание} \to x < -1 \vee -1 < x < 0$$

Рис. 6. Промежутки монотонности задачи 1 в документе Mathcad

т.е. возрастание на $(0;+\infty)$ и убывание на $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$;

(г) вторую производную и точки, в которых она равна нулю (рис. 7) :

$$f''(x) \to \frac{e^{x+1}\cdot\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}$$

f"_равна_нулю = ∎

значения_в_точках_где_f"_нуль = ∎

Рис. 7. Вторая производная задачи 1 в документе Mathcad

В данном случае таких точек нет.

(д) промежутки выпуклости вверх и вниз (рис. 8):

$$\text{выпусклость\_вверх} \to x < -1$$

$$\text{выпусклость\_вниз} \to -1 < x$$

Рис. 8. Промежутки выпуклости задачи 1 в документе Mathcad

т.е. выпуклость вверх на $(-\infty;-1)$ и выпуклость вниз на $(-1;+\infty)$;

(е) и наконец, сам график (рис. 9):

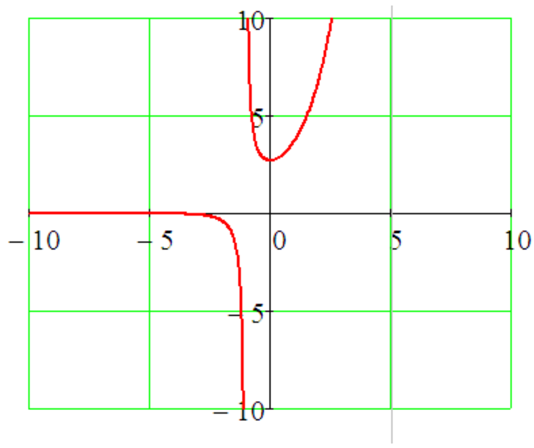

Рис. 9. График функции задачи 1 в документе Mathcad

Задача 2. Исследуем функцию $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построим ее график. Затем проверим все этапы решения с помощью Mathcad

1) Область определения $D(y)=\mathrm{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$.

2) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-y(x)$.

Функция нечетная, так как $y(-x)=-y(x)$, следовательно, ее график симметричен относительно точки начала координат.

3) Функция непериодическая.

4) Так как $y=0$ только при $x=0$, то график пересекает оси координат только в точке $O(0;0)$.

5) Функция имеет разрыв второго рода в точке $x=\sqrt{3}$, причем

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty.$$

Очевидно, что прямая $x=\sqrt{3}$ – двусторонняя вертикальная асимптота, аналогично $x=-\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

Проверим, существуют ли наклонные (горизонтальные) асимптоты: $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)}=-1, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Следовательно, $y=-x$ – наклонная двусторонняя асимптота.

6) Находим $y'=\dfrac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}$.

Решим уравнение $y'=0$: $\quad \dfrac{x^2(3-x)\cdot(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$

Нанесем на координатную прямую стационарные точки $x=-3$, $x=0,$ $x=3$ и точки разрыва функции $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$.

В соответствии со знаками производной заключаем, что функция возрастает на промежутках $\left(-3;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$ и убывает на промежутках $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ (рис. 10):

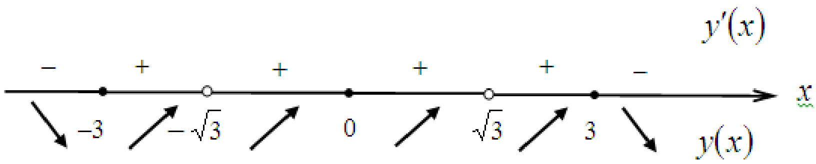

Рис. 10. Промежутки монотонности задачи 2

В точке $x=3$ функция имеет максимум: $y_{\max}(3)=-\frac{9}{2}$. В точке $x=-3$ функция имеет минимум: $y_{\min}(-3)=\frac{9}{2}$.

7) Вычислим $y''=(y')'=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(x^2+9)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3}$.

Найдем и нанесем на координатную прямую точки, в которых y'' равна нулю или не существует: $x=0$ – критическая точка второго рода, $x=\pm\sqrt{3}$ – точки разрыва функции. Определим знак y'' на интервалах, на которые эти точки разбивают числовую ось: $x=0$ – точка перегиба (рис. 11).

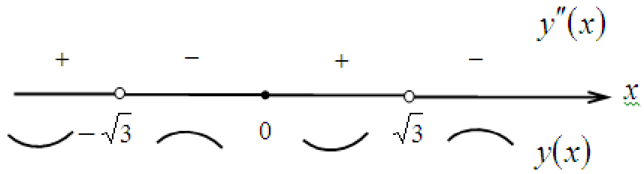

Рис. 11. Промежутки выпуклости задачи 2.

Отметим, что точки $x=\pm\sqrt{3}\notin D(y)$, поэтому по определению они не являются точками перегиба, хотя кривая имеет различный характер выпуклости по разные стороны от этих точек.

На промежутках $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$ кривая выпукла вниз, а на промежутках $(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$ выпукла вверх.

8) Используя эти результаты, построим график функции $y=\frac{x^3}{3-x^2}$ (рис. 12).

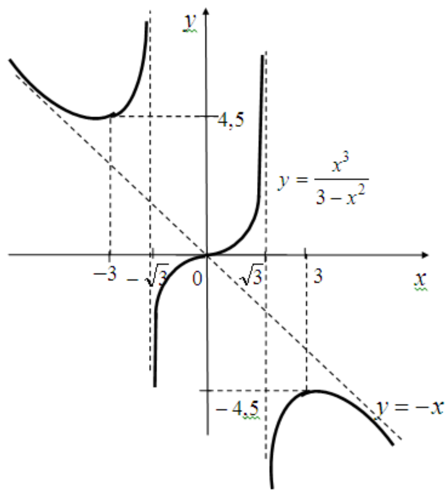

Рис. 12. График функции задачи 2.

Проверим теперь все этапы решения с помощью Mathcad.

Наклонные асимптоты $y = -x$ при $x \to \pm\infty$ (рис. 13):

$$\text{наклонные\_асимптоты}(x) \to \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix}$$

Рис. 13. Асимптоты задачи 2 в документе Mathcad

Первая производная и стационарные точки (рис. 14):

$$f'(x) \to -\frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2}$$

$$\text{стационарные\_точки} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.732 \\ -1.732 \end{pmatrix} \quad \text{значения\_в\_стацион\_точках} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.598 \\ 2.598 \end{pmatrix}$$

Рис. 14. Стационарные точки задачи 2 в документе Mathcad

Промежутки монотонности (рис. 15):

$$\text{возрастание} \to 1 < x < \sqrt{3} \vee -\sqrt{3} < x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee -1 < x < 0$$

$$\text{убывание} \to x < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x$$

Рис. 15. Промежутки монотонности задачи 2 в документе Mathcad

Вторая производная, промежутки выпуклости вверх и вниз (рис. 16):

$$\text{точки\_где\_f''\_равна\_нулю} = 0$$

$$\text{значения\_в\_точках\_где\_f''\_нуль} = 0$$

$$\text{выпусклость\_вверх} \to 1 < x \vee -1 < x < 0$$

$$\text{выпусклость\_вниз} \to x < -1 \vee 0 < x < 1$$

Рис. 16. Промежутки выпуклости задачи 2 в документе Mathcad

График (рис. 17):

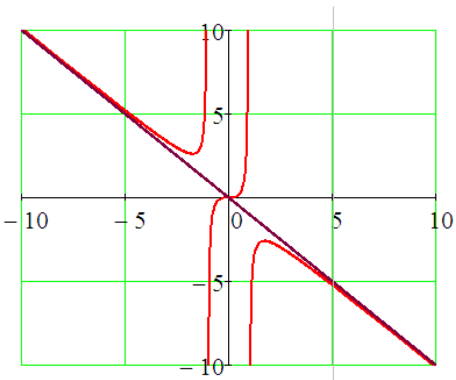

Рис. 17. График функции задачи 2 в документе Mathcad

Задача 3. Проведем полное исследование функции $y=\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}$ и построим ее график. Затем проверим все этапы решения с помощью Mathcad.

Находим область определения функции: $D\left(y\right)=(-\infty;1)\cup\left(1;9\right)\cup\left(9;+\infty\right)$.

Проверим, является ли функция четной или нечетной: $f\left(-x\right)=\frac{(-x-5)^3}{\left(-x\right)^2-10\left(-x\right)+9}=\frac{-(x+5)^3}{x^2+10x+9}$.

Поскольку $f\left(-x\right)\neq f\left(x\right), f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция не является периодической.

Находим точки пересечения графика с осями координат. Если $x=0$, то $y=-13\frac{8}{9}$; значит $B\left(0;-13\frac{8}{9}\right)$ — точка пересечения графика с осью Oy. Если $y=0$, то $x=5$, поэтому $A\left(5;0\right)$ — точка пересечения графика с осью Ox.

Исследуем непрерывность функции. Поскольку данная функция является элементарной, она непрерывна на всей своей области определения $D\left(y\right)$. Точки $x=1$ и $x=9$ не принадлежат $D\left(y\right)$, а следовательно, являются точками разрыва. Исследуем характер разрыва в указанных точках. Для этого вычислим односторонние пределы функции в точках $x=1$ и $x=9$. Имеем:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-5)^3}{\left(x-1\right)\left(x-9\right)}=\frac{-64}{\left(-0\right)\left(-8\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-5)^3}{\left(x-1\right)\left(x-9\right)}=\frac{-64}{\left(+0\right)\left(-8\right)}=+\infty.$$

Значит, $x=1$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=1$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9-0}\frac{(x-5)^3}{\left(x-1\right)\left(x-9\right)}=\frac{64}{8\cdot\left(-0\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9+0}\frac{(x-5)^3}{\left(x-1\right)\left(x-9\right)}=\frac{64}{8\cdot\left(+0\right)}=+\infty.$$

Следовательно, $x=9$ — точка разрыва 2-го рода, а прямая $x=9$ — двусторонняя вертикальная асимптота.

Находим наклонные асимптоты $y=kx+b$ графика функции. Для этого вычисляем следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-5)^3}{(x^2-10x+9)x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-5)^3}{x^2-10x+9}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-15x^2+75x-125-x^3+10x^2-9x}{x^2-10x+9}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+66x-125}{x^2-10x+9}=-5.$$

Значит, прямая $y=x-5$ является наклонной асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty.$

Определяем промежутки монотонности и экстремумы данной функции. Находим первую производную функции

$$y'=\frac{3(x-5)^2(x^2-10x+9)-(2x-10)(x-5)^3}{(x^2-10x+9)^2}=\frac{(x-5)^2\cdot(x^2-10x-23)}{(x-1)^2\cdot(x-9)^2}.$$

Определяем стационарные точки функции, решая уравнение $y'=0.$ Это точки $x_1=5-4\sqrt{3},\ x_2=5,\ x_3=5+4\sqrt{3}.$

Исследуем знак y' и находим интервалы монотонности и точки экстремума. Интервалы монотонности: возрастание на интервалах $(-\infty;5-4\sqrt{3})$, $(5+4\sqrt{3}:+\infty)$, убывание на интервалах $(5-4\sqrt{3};1)$, $(1;5)$, $(5;9)$, $(9;5+4\sqrt{3})$

Вычислим значения функции в точках экстремума $x=5\pm4\sqrt{3}.$ Получаем

$y_{\max}\left(5-4\sqrt{3}\right)=-6\sqrt{3},;\ y_{\min}\left(5+4\sqrt{3}\right)=6\sqrt{3}.$

Таким образом, точка $C\left(5-4\sqrt{3};-6\sqrt{3}\right)$ это точка локального максимума, а $D\left(5+4\sqrt{3};6\sqrt{3}\right)$ — локального минимума функции.

Определим промежутки выпуклости и точки перегиба. Находим вторую производную функции

$$y''=\frac{32\cdot(x-5)\cdot(x^2-10x+73)}{(x-1)^3(x-9)^3}.$$

Точки из области определения первой производной, в которых вторая производная обращается в нуль или не определена, являются точками возможного перегиба графика функции. В нашем случае это точка $x=5.$ Исследуем знак второй производной. Поскольку $f''(x) > 0$ при $x \in (1;5) \cup (9;+\infty)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вниз. Аналогично, $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty;1) \cup (5;9)$, то на этих интервалах график функции является выпуклым вверх. Значит, точка $x = 5$ — это точка перегиба.

На основании всех полученных результатов строим график функции $y = \dfrac{(x-5)^3}{x^2 - 10x + 9}$ (рис. 18).

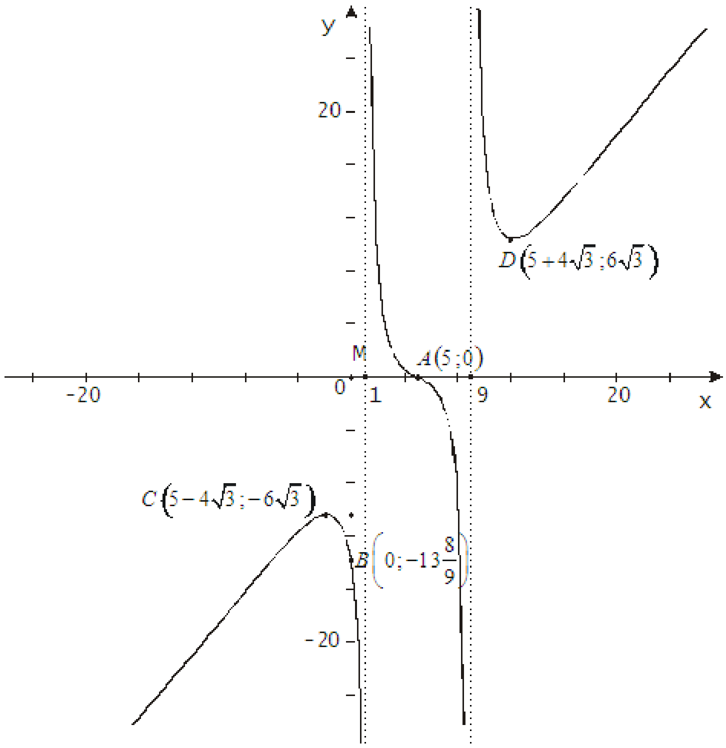

Рис. 18. График функции задачи 3.

Проверим теперь все этапы решения с помощью Mathcad (рис. 19-22):

$$\text{наклонные\_асимптоты}(x) \rightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ x-5 \end{pmatrix} \qquad f'(x) \rightarrow -\frac{(x-5)^2 \cdot (10 \cdot x - x^2 + 23)}{(x-1)^2 \cdot (x-9)^2}$$

$$\text{стационарные\_точки} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \cdot \sqrt{3} + 5 \\ 5 - 4 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{значения\_в\_стацион\_точках} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10.392 \\ -10.392 \end{pmatrix}$$

Рис. 19. Асимптоты и стационарные точки задачи 3 в документе Mathcad

$$\text{возрастание} \rightarrow x < 5 - 4 \cdot \sqrt{3} \vee 4 \cdot \sqrt{3} + 5 < x$$

$$\text{убывание} \rightarrow 5 - 4 \cdot \sqrt{3} < x < 1 \vee 9 < x < 4 \cdot \sqrt{3} + 5 \vee 1 < x < 5 \vee 5 < x < 9$$

Рис. 20. Промежутки монотонности задачи 3 в документе Mathcad

$$f''(x) \rightarrow \frac{(32 \cdot x - 160) \cdot (x^2 - 10 \cdot x + 73)}{(x-1)^3 \cdot (x-9)^3}$$

точки_где_f''_равна_нулю $\rightarrow 5$

значения_в_точках_где_f''_нуль $= 0$

выпусклость_вверх $\rightarrow x < 1 \vee 5 < x < 9$

выпусклость_вниз $\rightarrow 9 < x \vee 1 < x < 5$

Рис. 21. Промежутки выпуклости задачи 3 в документе Mathcad

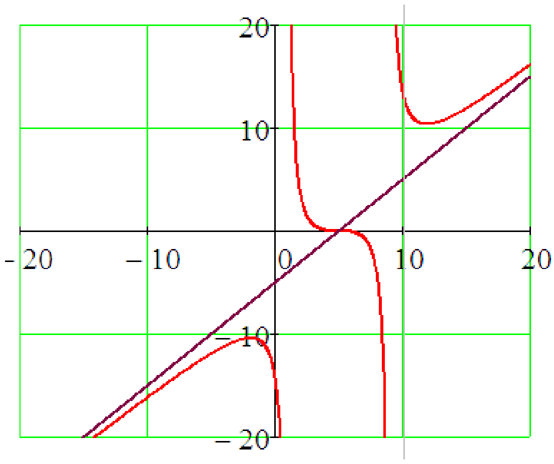

Рис. 22. График функции задачи 3 в документе Mathcad

Приложение

Файл с Mathcad-документом «Исследование функций» прилагается к данной статье. Подпрограммы-процедуры, содержащиеся в этом Mathcad-документе, не предусмотрены инструментарием Mathcad и являются авторскими продуктами, которые «запоролены» на рабочем листе Mathcad-документа в специальном блоке (он отмечен жирной красной линией). При этом пользователю нет необходимости вторгаться в эту скрытую область, чтобы что-то менять в ней в зависимости от решаемой задачи - процедуры отлажены и универсальны. Вся необходимая информация для ввода исходных данных содержится в виде комментариев и демонстрационных примеров на рабочем листе Mathcad-документа, включая выполненный на этом листе пример.

Список использованных источников (на языке оригинала)

1. Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. СПб: БХВ, 2004. 593 с.

2. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И. Математика для экономистов на базе Mathcad : учеб. пособие. СПб: БХВ-Петербург, 2003. 496 с.

3. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001. 1296 с.

4. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad: математический практикум для экономистов и инженеров. М.: Финансы и статистика, 1999. 656 с.

5. Титов К.В. Компьютерная математика. М.: ИЦ РИОР, 2016. 261 с.

6. Кирсанов М.Н., Кузнецова О.С. Алгебра и геометрия. Сборник задач и решений с применением системы Maple. М.: ИНФРА-М, 2017. 272 с.

References (на английском языке)

1. Chernyak A.A., Chernyak ZH.A., Domanova YU.A. Vysshaya matematika na baze Mathcad. Obshchiy kurs [Higher Mathematics Based on Mathcad. General Course]. SPb: BKHV, 2004. 593 p. (In Russian)

2. Chernyak A.A., Novikov V.A., Mel'nikov O.I. Matematika dlya ekonomistov na baze Mathcad : ucheb. Posobiye [Mathematics for Economists Based on Mathcad: Textbook]. SPb: BKHV-Peterburg, 2003. 496 p. (In Russian)

3. D'yakonov V.P. Komp'yuternaya matematika. Teoriya i praktika [Computer Mathematics. Theory and Practice]. M.: Nolidzh, 2001. 1296 p. (In Russian)

4. Plis A.I., Slivina N.A. MathCad: matematicheskiy praktikum dlya ekonomistov i inzhenerov [MathCad: Mathematical Workshop for Economists and Engineers]. M.: Finansy i statistika, 1999. 656 p. (In Russian)

5. Titov K.V. Komp'yuternaya matematika [Computer Mathematics]. M.: ITS RIOR, 2016. 261 p. (In Russian)

6. Kirsanov M.N., Kuznetsova O.S. Algebra i geometriya. Sbornik zadach i resheniy s primeneniyem sistemy Maple [Algebra and Geometry. A Collection of Problems and Solutions Using the Maple System]. M.: INFRA-M, 2017. 272 p. (In Russian)